Journées SMAI MODE 2018

Formules de dérivées de forme pour les obstacles en mouvements de foules

Boubacar FALL
Université Cheikh Anta Diop de Dakar(UCAD)

Diaraf Seck
Université Cheikh Anta Diop de Dakar(UCAD)

Filippo Santambrogio
Université Paris-Sud, Orsay

Résumé. En considérant un domaine donné R contenant un obstacle O, nous allons établir la dérivée première de forme du temps moyen de sortie des partilucles quand ces dernières sortent du domaine suivant une EDP modélisant le mouvement de foule. Cette fonction qui est le temps moyen de sortie dépend effectivement de la géométrie de l'obstacle O. Cette dérivée première est un pas important pour la minimisation du temps moyen de sortie des particles dans le domaine R. Dans ce travail, nous allons considérer la famille suivante d'équations aux dérivées partielles: Fokker-Planck, le cas des Mileux poreux et un cas plus général. En outre, dans le cas de dimension deux nous allons expliciter l'expression de la dérivée de forme mettant en evidence le théoreme de Hadamard.

Mots-clefs : Optimisation de forme, Mouvement de foules, EDPs.

La modèlisation du comportement des foules est un domaine très actif des mathématiques appliquées ces dernières années. Nous soulignons l'importance de ses applications dans la vraie vie en plus elle sert de base pour comprendre de nombreux autres phénomènes venant par exemple des activités des êtres humains, la biologie (migration cellulaire, croissance tumorale, formation de populations animales, etc.), la physique des particules et l'économie.
De nos jours, il y'a beaucoup de travaux effucués dans ce domaine voir par exemple [1] et les références dans celui-ci. Une question naturelle dans tous ces modèles est celle des phénomènes de congestion: dans de nombreuses situations pratiques, de très grandes quantités de personnes pourraient essayer d'occuper le même endroit, ce qui pourrait être impossible, ou conduire à un fort effets négatif sur le mouvement, en raison des limitations naturellement imposées sur la densité de la foule. Ces phénomènes ont été étudiés en utilisant différents modèles, qui pourraient être soit "Microscopique" (sur la base des EDOs sur le mouvement d'un grand nombre d'agents) [2] ou "Macroscopique" (décrivant les agents via leur densité et leur vitesse, typiquement avec le formalisme Eulérien) [3], [4]. Dans [5], les auteurs ont examiné la relation entre l'équation d'évolution de Hele-Shaw avec dérive, l'équation du milieu poreux avec dérive, et un modèle de mouvement de foule avec congestion initialement proposé par [4], [6]. Ils ont montré que les solutions des équations dans les milieux poreux convergent vers la solution de l'équation d'évolution de Hele-Shaw quand $m \to \infty$ à condition que le potentiel de dérive soit strictement sous-harmonique. En utilisant la structure de flot-gradient à la fois de l'équation du milieu poreux et le modèle de mouvement de foules, ils ont également prouvé que les solutions de l'équation de type milieu poreux convergent également vers le mouvement de

foule congestionné quand $m \to \infty$.
Dans ce travail, nous allons nous concentrer sur les modèles macroscopiques avec placement d'obstacle et allons nous intéresser à la forme optimale de cet obstacle afin de minimiser le temps de sortie des particules. Il est important de souligner que dans le milieu appliqué, il est connu que dans certains cas il est optimal de placer des obstacles devant les sorties pour augmenter le flux de l'évacuation, mais dans quelle mesure cela soit toujours vrai, et pour quels modèles, cela n'a pas encore fait l'objet d'une étude mathématique rigoureuse.
Nous allons considérer un domaine dans lequel se retrouve un obstacle ainsi que des particules ou une foule modélisées par une fonction de densité ρ, qui évolue en suivant une certaine EDP. Ensuite, nous allons effectuer la dérivée première de forme du temps moyen de sortie de ces particules. Cette dérivée de premier ordre (voir [7]) est une étape importante dans la compréhension de la façon dont les obstacles sont choisis afin de minimiser le temps de sortie moyenne. Un autre fait intéressant avec cette information, pour une éventuelle optimisation de ce critère, est qu'on peut proposer une méthode numérique plus particulièrement la méthode de descente pour se rapprocher de la forme optimale des obstacles sous d'éventuelles contraintes.
Notre exposé est organisé comme suit: la première partie est consacrée à la position du problème, une modélisation du problème sera proposée. Ensuite, nous allons énoncer notre principal résultat où nous donnons la dérivée première de forme. Plusieurs cas sont considérés: le cas où la densité ρ satisfait l'équation de Fokker-Planck, la situation dans les milieux poreux et un cas plus général mais plus difficile provenant de la modélisation des mouvements de foules.

Références

[1] A. R. Mészáros. *Density constrains in Optimal transport, PDEs and Mean Field Games*. Thesis, université Paris-Sud, 2015.

[2] J. Venel. *Modélisation mathématique et numérique de mouvements de foule*. Thesis, université Paris-Sud, 2008.

[3] A. Roudneff. *Modélisation macroscopique de mouvements de foule*. Thesis, Université Paris-Sud, 2011.

[4] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, F. Santambrogio. *A macroscopic crowd motion model of gradient flow type*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 20:1787-1821, 2010.

[5] D. Alexander, I. Kim, Y. Yao. *Quasi-static evolution and congested crowd transport*. Nonlinearity, 27:1-36, 2014.

[6] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, F. Santambrogio, J. Venel. *Handling congestion in crowd motion modeling*. Network and Heterogeous Media, 6(3):485-519, 2011.

[7] A. Henrot, M. Pierre. *Variation et Optimisation de forme, Une analyse géométrique*. Mathématiques & Applications, 2005.