Journées SMAI MODE 2018

Optimisation d'une forme fractale en transport branché

Paul PEGON
Université Paris-Sud

Filippo SANTAMBROGIO
Université Paris-Sud

Qinglan XIA
UC Davis

Résumé. On s'intéresse à la question suivante : quel est l'ensemble de volume un qui s'irrigue le mieux à partir d'une source ponctuelle située à l'origine, au sens du transport branché ? Nous pouvons formuler cette question comme un problème d'optimisation de forme et prouver l'existence de solutions, qui peuvent être considérées comme des sortes de "boule unité" pour le transport branché. La régularité β-Hölder de la fonction paysage permet d'obtenir une borne supérieure sur la dimension de Minkowski du bord : $\overline{\dim}_M \partial A \leq d - \beta$ (pour un certain exposant $\beta \in]0,1[$), que l'on conjecture comme étant la dimension (non-entière) du bord. Nous proposons une première approche pour calculer numériquement une forme optimale approchée, utilisant une adaptation de l'approximation par champs de phase du transport branché introduite il y a quelques années par Oudet et Santambrogio. Afin de rechercher un minimiseur de la fonctionnelle approchée, on met en oeuvre des méthodes d'optimisation convexe non lisse, de type gradient et quasi-Newton proximal.

Mots-clefs : transport branché ; fonction paysage ; fractales ; approximation par champs de phase, optimisation non lisse

Présentation du transport branché Étant données deux mesures de probabilité μ et ν sur $\mathbb{R}^d$, le problème général de transport optimal consiste à trouver une connexion de coût minimal entre celles-ci. En transport branché, la connexion s'effectue le long d'une structure de dimension 1 et le coût de transport d'un ensemble de particules de masse totale m sur une longueur ℓ est de la forme $m^\alpha \times \ell$, où $\alpha \in [0,1[$ est un exposant dit *concave*. La stricte sous-additivité en m implique qu'il est moins coûteux de faire voyager les particules ensemble le long de trajectoires communes d'où la présence de *branchements* dans les structures optimales. Plusieurs modèles continus de transport branché ont été proposés comme extension au modèle discret introduit au départ par Gilbert [3]. Dans le modèle dit Eulérien (proposé par Xia), le problème s'écrit en terme de mesure vectorielle $v \in \mathcal{M}^d(\mathbb{R}^d)$:

$$\inf_v \quad \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^\alpha \, \mathcal{H}^1(\mathrm{d}x) : v \text{ est 1-rectifiable et } \nabla \cdot v = \mu - \nu \right\}, \tag{EI$_\alpha$}$$

où $\mathbf{M}^\alpha(v) := \int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^\alpha \, \mathcal{H}^1(\mathrm{d}x)$ est la α-*masse* de v. Lorsque α n'est pas trop petit ($\alpha > 1 - 1/d$), ce qu'on suppose désormais, le coût optimal $\mathbf{d}^\alpha(\mu,\nu) := \inf\,(\mathrm{EI}_\alpha)$ forme une distance $\mathbf{d}^\alpha$ sur les mesures de probabilité qui métrise la topologie faible-$\star$ dans la dualité avec les fonctions $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$, et qu'on appelle *distance d'irrigation* d'ordre α.

Un problème d'optimisation de forme fractal La fractalité en transport branché est encore mal comprise. Des premiers résultats ayant trait à des propriétés d'autosimilarité ont été démontrés par Brancolini et Solimini, et notre but est d'exhiber à présent une dimension non-entière en transport branché. Avec F. Santambrogio et Q. Xia nous avons étudié dans [1] des sortes de "boules unité" en transport branché, dont on conjecture la fractalité du bord. Il s'agit des ensembles de volume 1 les plus proches de l'origine 0 au sens du transport branché, c'est-à-dire les solutions E du problème

$$\min \quad \{\mathbf{X}^\alpha(\mathcal{L}\llcorner E) \coloneqq \mathbf{d}^\alpha(\delta_0, \mathcal{L}\llcorner E) : \mathrm{Vol}(E) = 1\}. \tag{S}$$

Se posent alors les questions classiques d'existence, d'unicité et de régularité (ou non) des minimiseurs. Pour cela, nous avons introduit un problème relaxé :

$$\min_\nu \quad \{\mathbf{X}^\alpha(\nu) \doteq \mathbf{d}^\alpha(\delta_0, \nu) : \nu \leq 1, \nu \in \mathrm{Prob}(\mathbb{R}^d)\}, \tag{R}$$

pour lequel l'existence est aisée à montrer par des arguments de semicontinuité et de compacité. Un outil fondamental pour l'étude de ce problème est la *fonction paysage*, désormais classique en transport branché, qui joue le rôle de variation première pour la fonctionnelle $\mathbf{X}^\alpha$. Si ν est un minimiseur de (R) et z une fonction paysage associée à ν, nous avons pu établir :

- ν est l'indicatrice d'un ensemble A qui est un ensemble de sous-niveau de z :

$$A = \{x : z(x) \leq z^\star\}, \text{ où } z^\star = \frac{e_\alpha}{\alpha}\left(\alpha + \frac{1}{d}\right), \tag{1}$$

  et A est un ensemble compact et connexe par arcs solution de (S),

- z est β-Hölder où $\beta = 1 + d\alpha - d \in]0, 1[$, ce qui permet d'obtenir une borne sur la dimension de Minkowski de ∂E :

$$\overline{\dim}_M \partial E \leq d - \beta.$$

On conjecture que $\dim_H(\partial E) = \dim_M(\partial E) = d - \beta$, mais nos stratégies n'ont pas encore permis d'obtenir la minoration $\underline{\dim}_H \partial E \geq d - \beta$, laissant la question de la fractalité ouverte.

Résolution numérique Le but est de calculer numériquement des solutions approchées au problème (S). Notre approche se base sur une approximation variationnelle à la Modica-Mortola du transport branché, proposée par Oudet-Santambrogio dans [4]. Il a été démontré que la fonctionnelle :

$$\mathbf{M}_\varepsilon^\alpha(v) = \varepsilon^{-\sigma_1} \int |v(x)|^\sigma \, \mathrm{d}x + \varepsilon^{\sigma_2} \int \frac{|v(x)|^2}{2} \, \mathrm{d}x$$

pour des constants $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ bien choisies, Γ-converge vers $\mathbf{M}^\alpha$ lorsque $\varepsilon \to 0$. En utilisant la définition de $\mathbf{d}^\alpha(\mu, \nu)$, le problème relaxé (R) peut se réécrire sous forme Eulérienne

$$\min_v \quad \{\mathbf{M}^\alpha(v) : \mu - 1 \leq \nabla \cdot v \leq \mu\} \quad \text{où } \mu = \delta_0, \tag{ES}$$

et on propose de l'approcher par :

$$\min_v \quad \{\mathbf{M}_\varepsilon^\alpha(v) : a_\varepsilon \leq \nabla \cdot v \leq b_\varepsilon\}, \tag{AS}$$

où $a_\varepsilon, b_\varepsilon$ sont des approximations convenables de $\mu - 1$ et μ respectivement.
Pour résoudre numériquement (AS), nous avons recours à une méthode L-BFGS projetée (voir [2]), qui s'écrit, pour minimiser une fonction f sur un convexe C :

$$\left| \begin{array}{l} \quad v_0 \text{ donné} \\ v_{n+1} = p_C^{H_n}(v_n - \tau_n H_n^{-1} \nabla f(v_n)), \end{array} \right. \tag{2}$$

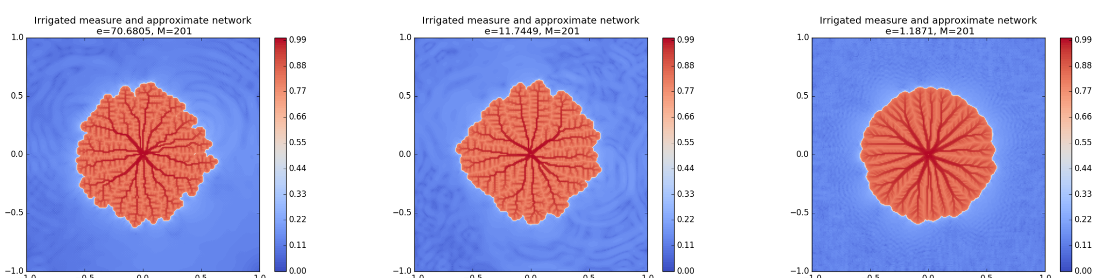
où H_n est la Hessienne approchée obtenue par la méthode L-BFGS à L pas, et $p_C^{H_n}$ est la projection sur C par rapport à la norme $\|\cdot\|_{H_n}$ définie par $\|v\|_{H_n} := \sqrt{H_n v \cdot v}$. Dans notre cas, la principale difficulté vient du calcul de la projection, qui équivaut à résoudre le problème :

$$\min \quad \left\{ \frac{\|v - v_0\|_H^2}{2} \ : \ a \leq \nabla \cdot v \leq b, \ v // \partial\Omega \right\}. \tag{P}$$

En tant que problème convexe, il admet un problème dual, qui peut se mettre sous forme

$$\min_u f(u) + g(u), \tag{D}$$

où f est lisse (de gradient calculable rapidement) et g est "proximable". Or ce type de problème se résout par des méthodes d'optimisation convexe non lisse standards comme FISTA. On récupère de cette manière une solution au problème primal : si u est solution de (D) alors $v = v_0 + \nabla_H u$ est solution de (P). Nous présentons les résultats de quelques simulations numériques réalisées sur une grille de taille $M \times M$ avec $M = 201$ et différentes valeurs de α.



(a) $\alpha = 0.55$ (b) $\alpha = 0.65$ (c) $\alpha = 0.85$

Figure 1: Ensembles localement optimaux et réseaux sous-jacents.

Références

[1] P. Pegon, F. Santambrogio, Q. Xia. *A fractal shape optimization problem in branched transport*. Accepté dans : Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.

[2] J. Lee, Y. Sun, M. Saunders. *Proximal Newton-type methods for minimizing composite functions*. SIAM Journal on Optimization, 24 (3), 2014.

[3] E. N. Gilbert. *Minimum Cost Communication Networks*. Bell System Technical Journal, 46 (9), 1967.

[4] E. Oudet, F. Santambrogio. *A Modica-Mortola approximation for branched transport and applications*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 201 (10), 2011.