Journées SMAI MODE 2018

Régularisation des processus d'évolution de Moreau

Florent NACRY
IRMAR-INSA de Rennes

Lionel THIBAULT
Université Montpellier

Résumé. Cet exposé est consacré à la régularisation des processus d'évolution de Moreau, convexes et non-convexes, continus et discontinus, dans un Hilbert quelconque. Nous passerons en revue diverses contributions majeures de la littérature de 1971 à nos jours : J.J. Moreau dans le cas convexe absolument continu, M.D.P. Monteiro Marques lorsque la variation de l'ensemble est simplement à variation bornée puis la première étude non-convexe/prox-régulière due à L. Thibault ainsi que la récente régularisation de A. Jourani et E. Vilches non-prox-régulière/α-far. Nous présenterons également nos nouveaux résultats pour un ensemble mobile prox-régulier dont le mouvement est contrôlé seulement à travers la distance de Pompeiu-Hausdorff tronquée.

Mots-clefs : Processus d'évolution de Moreau, enveloppe de Moreau/régularisée de Yosida, inclusion différentielle, ensemble prox-régulier, ensemble α-far, distance de Pompeiu-Hausdorff.

Dans le premier volume du célèbre séminaire d'*Analyse Convexe de Montpellier* ([5]), J.J. Moreau introduit et développe sous le nom "processus de balayage/rafle" ("sweeping process" en anglais) le problème d'évolution

$$(\mathcal{SP}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N(C(t); u(t)) & \text{p.p. } t \in [0,T], \\ u(t) \in C(t) & \text{pour tout } t \in [0,T], \\ u(0) \in C(0), \end{cases}$$

où $C(t)$ est un ensemble mobile dépendant du temps d'un Hilbert quelconque $\mathcal{H}$ et où $\mathcal{N}(C(t); u(t))$ désigne l'ensemble des normales à $C(t)$ au point $u(t)$ en un sens à préciser. L'importance de cette inclusion différentielle dans divers champs d'applications des mathématiques (voir, par exemple, le monographe [1] de S. Adly et les références à l'intérieur) n'est plus à démontrer et a notamment conduit à de remarquables extensions et variantes : stochastique, dépendance en l'état, perturbation, cadre banachique, etc.

Pour traiter le problème $(\mathcal{SP})$, trois grandes familles de méthodes co-existent : l'algorithme de rattrapage de Moreau, la réduction à une inclusion différentielle sans contraintes ainsi que la régularisation du cône normal. C'est cette troisième technique qui sera au coeur de notre exposé dans lequel nous passerons en revue diverses contributions majeures de la littérature de 1971 à nos jours.

Nous débuterons avec le travail fondateur de J.J. Moreau ([5]) dans le cas convexe absolument continu qui s'apparente à un problème d'évolution gouverné par un opérateur maximal monotone. Le fameux lien entre régularisée de Yosida et enveloppe de Moreau conduit à examiner la famille d'équations différentielles ordinaires

$$(\mathcal{E}_\lambda) \quad -\dot{u}_\lambda(t) = \frac{1}{2\lambda} \nabla d^2_{C(t)}(u(t)) \quad \text{et} \quad u_\lambda(0) = u_0.$$

Sous l'hypothèse d'un mouvement absolument continu pour $C(\cdot)$, i.e., sous l'existence d'une fonction $v(\cdot) : [0, T] \to [0, +\infty[$ croissante absolument continue vérifiant pour tout $s < t$,

$$\mathrm{haus}(C(t), C(s)) \leq v(t) - v(s),$$

la famille de solutions $(u_\lambda(\cdot))_{\lambda>0}$ converge uniformément lorsque $\lambda \downarrow 0$ vers $u(\cdot)$ une solution de $(\mathcal{SP})$. Nous poursuivrons avec les idées de M.D.P. Monteiro Marques ([4]) pour adapter cette idée de régularisation lorsque le mouvement de l'ensemble est discontinu, autorisant d'éventuels sauts. Le problème $(\mathcal{SP})$ considéré est alors une inclusion différentielle à mesures dont les solutions sont seulement exigées à variation bornée. Nous irons ensuite au-delà de la convexité avec le premier travail dans cette direction dû à L. Thibault ([7]) ainsi qu'avec la très récente régularisation de A. Jourani et E. Vilches non-prox-régulière/α-far ([3]). Enfin, nous présenterons nos nouveaux résultats ([6]) pour le problème $(\mathcal{SP})$ perturbé par un terme univoque $f(t, u(t))$, décrit par un ensemble mobile prox-régulier dont le mouvement est contrôlé seulement à travers la distance de Pompeiu-Hausdorff tronquée, i.e., pour tout $s < t$,

$$\sup_{x \in \rho\mathbb{B}} |d(x, C(s)) - d(x, C(t))| =: \mathrm{haus}_\rho(C(s), C(t)) \leq v(t) - v(s).$$

Références

[1] S. Adly. *A Variational Approach to Nonsmooth Dynamics: Applications In Unilateral Mechanics and Electronics*. To appear, Springer (2018).

[2] H. Brézis. *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*. Math. Stud. 5, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[3] A. Jourani, E. Vilches. *Moreau-Yosida regularization of state-dependent sweeping processes with nonregular sets*. J. Optim. Theory Appl. 173 (2017), 91-115.

[4] M.D.P. Monteiro Marques. *Regularization and graph approximation of a discontinuous evolution problem*. J. Differential Equations 67 (1987), 145-164.

[5] J.J. Moreau. *Rafle par un convexe variable I*. Travaux du séminaire d'analyse convexe de Montpellier (1971), Exposé 15.

[6] F. Nacry, L. Thibault. *Regularization of sweeping process: old and new*. Submitted.

[7] L. Thibault. *Regularization of nonconvex sweeping process in Hilbert space*. Set-Valued Anal. 16 (2008), 319-333.