

# Différentiation automatique d'une marche rapide non-holonomique pour le calcul de trajectoires menaçantes sous surveillance de capteurs

Jean-Marie MIREBEAU

University Paris-Sud, CNRS, University Paris-Saclay,

**Johann DREO**

THALES Research & Technology

**Résumé.** Nous considérons un jeu à deux joueurs, où le premier joueur doit installer un système de surveillance, sous la forme d'un ensemble de capteurs disposés dans une région admissible. Le second joueur doit entrer dans la zone surveillée, visiter une région cible, puis quitter la zone, tout en minimisant sa probabilité globale de détection. Les deux joueurs connaissent la région cible et le deuxième joueur connaît les détails de l'installation de surveillance. Les trajectoires optimales pour le second joueur sont calculées en utilisant une variante récemment développée de l'algorithme de marche rapide, prenant en compte une anisotropie de détection et des contraintes de courbure modélisant la maniabilité du véhicule du second joueur. L'optimisation du système de surveillance par une méthode de quasi-Newton exploite une procédure de différenciation semi-automatique en mode inverse, estimant le gradient de la fonction de valeur liée à l'emplacement du réseau de capteurs en temps  $\mathcal{O}(N \ln N)$ .

**Mots-clefs :** marche rapide anisotropique, planification de déplacement, placement de capteurs, théorie des jeux, optimisation

Ce travail présente une preuve de concept de l'implémentation d'un algorithme numérique de planification de déplacement lié à un jeu à deux joueurs. Un premier joueur sélectionne, dans une classe admissible  $\Xi$ , une fonction de coût intégrale sur les chemins, prenant en compte leur position, leur orientation et éventuellement leur courbure. Le second joueur sélectionne un chemin dans une classe admissible  $\Gamma$ , comprenant des points terminaux et intermédiaires. L'objectif des joueurs est respectivement de maximiser et minimiser le coût du trajet.

$$\mathfrak{C}(\Xi, \Gamma) := \sup_{\xi \in \Xi} \inf_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{C}(\xi, \gamma), \quad \text{où } \mathfrak{C}(\xi, \gamma) := \int_0^{T(\gamma)} \mathcal{C}_\xi(\gamma(t), \gamma'(t), \gamma''(t)) dt, \quad (1)$$

où le chemin  $\gamma$  est paramétré à la vitesse unitaire euclidienne, et la date d'arrivée  $T(\gamma)$  est libre. Du point de vue de la théorie des jeux, il s'agit d'un jeu coopératif à somme nulle, où le joueur  $\Xi$  n'a aucune information et  $\Gamma$  une information complète sur la stratégie de  $\Xi$ .

Le jeu (1) modélise typiquement un problème de surveillance [8], et  $\exp(-\mathfrak{C}(\Xi, \Gamma))$  est la probabilité pour le joueur  $\Gamma$  de visiter un point clé prescrit sans être détecté par le joueur  $\Xi$ . La dépendance du coût  $\mathcal{C}_\xi$  au chemin tangent  $\gamma'(t)$  modélise la variation d'une mesure de la détection de la cible (surface équivalente radar, index de cible, etc.) en fonction des positions et orientations relatives de la cible et du capteur. La dépendance de  $\mathcal{C}_\xi$  à la courbure de trajectoire  $\gamma''(t)$  modélise les contraintes de manœuvrabilité, telles que la nécessité de ralentir

dans les virages serrés [5], voire même une borne sur la courbure du chemin [4]. Strode [8] a montré l'interaction entre la planification de mouvement et la théorie des jeux dans une disposition similaire, mais en utilisant une planification de déplacement isotrope sur graphe. Au même moment, Barbaresco [2] a utilisé la marche rapide pour calculer les chemins vers un seul radar, mais sans contraintes de courbure et sans utiliser de modèle de jeu.

Les principales contributions de ce document sont les suivantes. *Anisotropie et pénalisation de la courbure.* Le problème de planification de mouvement du joueur  $\Gamma$  est résolu numériquement *via* une EDP eikonale généralisée posée sur un domaine à deux ou trois dimensions, fortement anisotrope du fait de la présence d'une pénalité de courbure et d'une mesure de détection dépendant de l'orientation. Un algorithme de marche rapide est utilisé pour le résoudre optimalement, s'appuyant sur une construction adaptative de pochoirs proposée récemment, fondés sur des outils de réseau géométriques [5, 6, 7].

*Calcul de gradient pour le placement des capteurs.* L'optimisation de la stratégie pour le joueur  $\Xi$  est classiquement un problème non-convexe auquel diverses stratégies peuvent être appliquées, cependant, la connaissance du gradient par rapport à la variable  $\xi \in \Xi$  est généralement utile. Pour ce faire, nous implémentons des algorithmes de différenciation efficaces, directe et inverse, afin d'estimer le gradient de la fonction de valeur du joueur  $\Xi$ .

$$\nabla_{\xi} \mathfrak{C}(\xi, \Gamma), \quad \text{où } \mathfrak{C}(\xi, \Gamma) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{C}(\xi, \gamma). \quad (2)$$

La différenciation en mode inverse en réduit le coût de calcul de  $\mathcal{O}(N^2)$  [3], à  $\mathcal{O}(N \ln N)$ .

Le domaine physique choisi pour les exemples numériques suivants est le rectangle  $R = [0, 2] \times [0, 1]$ , moins quelques obstacles. Le point source est  $(0.2, 0.5)$  et le point clé cible  $(1.8, 0.5)$ . Le domaine de calcul est donc  $\Omega = R$  pour les modèles indépendants de la courbure et  $\Omega = R \times \mathbb{S}^1$  pour les modèles dépendants de la courbure, qui sont discrétisée sur une grille  $180 \times 89$  ou  $180 \times 89 \times 60$ .

Un exemple consiste à ce que le  $\Xi$  place des radars sur le domaine  $R = [0, 2] \times [0, 1]$ , ici sans obstacles, et le second joueur doit voler sans être détecté. La fonction de coût est alors :

$$\mathfrak{C}_{\xi}(p, \dot{p}, \ddot{p}) = \mathfrak{C}_*(|\ddot{p}|) \sqrt{\sum_{q \in \xi} \frac{\langle \dot{p}, n_{p\ddot{q}} \rangle^2 + \delta^2 \langle \dot{p}, n_{p\dot{q}}^{\perp} \rangle}{\|p - q\|^4}} \quad (3)$$

où  $n_{p\ddot{q}} := (q - p) / \|q - p\|$ . La stratégie du premier joueur  $\xi$  contient les positions de trois radars, contrainte par le sous-domaine  $[0.4, 1.6] \times [0, 1]$ . Le paramètre  $\delta$  est réglé à 1 pour une surface équivalente radar (SER) isotropique, ou sur 0.2 pour une SER anisotropique. Dans ce dernier cas, un avion montrant son côté à un radar a cinq fois plus de chance d'être détecté qu'un avion montrant son nez ou sa queue, bien que localisé au même endroit. Les flèches vertes de la figure 1 pointent depuis la position originale vers la position optimisée (localement) pour  $\Xi$ . À cette position, plusieurs trajectoires sont optimales pour le joueur  $\Gamma$ , en rouge.

Sur un ordinateur portable standard (2.7Ghz, 16GB ram), optimiser l'objectif du second joueur, en résolvant une équation eikonale généralisée, prend environ une seconde dans le cas dépendant de la courbure, et environ soixante fois moins dans les cas indépendant lde la courbure, grâce à l'absence de discrétisation angulaire du domaine. L'optimisation de l'objectif du premier joueur nécessite environ 100 itérations de *L-BFGS*, chacune prenant au plus 8s. Pour la stabilité de la procédure de minimisation, les problèmes considérés ont été légèrement régularisés par l'utilisation de fonctions adoucies et en « floutant » le point d'arrivée de la cible autour des  $3 \times 3$  pixels adjacents. Les codes (libres et gratuits) permettant de reproduire

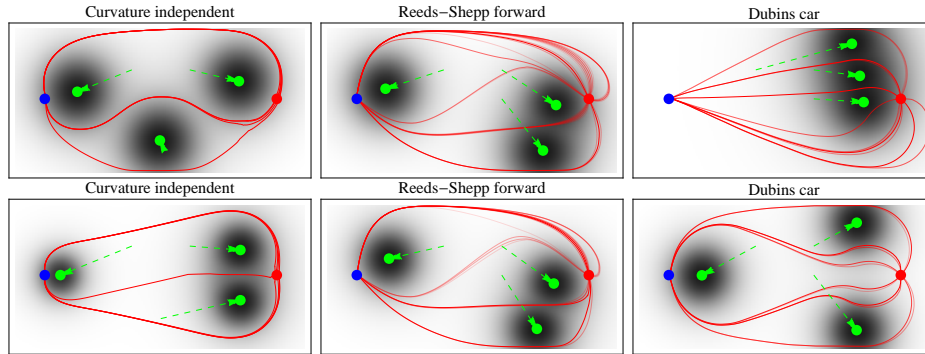


Figure 1: Placement optimal de radars avec une surface équivalente radar isotropique (en haut) ou anisotropique (en bas).

(la plupart) des résultats numériques présentés sont disponibles sur la page web du premier auteur<sup>1</sup>.

## Références

- [1] F. BARBARESCO AND B. MONNIER. *Minimal geodesics bundles by active contours: Radar application for computation of most threatening trajectories areas & corridors*. 10th European Signal Processing Conference, Tampere, 2000, pp. 1-4.
- [2] F. BARBARESCO. *Computation of most threatening radar trajectories areas and corridors based on fast-marching & Level Sets*. IEEE Symposium on Computational Intelligence for Security and Defense Applications (CISDA), Paris, 2011, pp. 51-58.
- [3] F. BENMANSOUR, G. CARLIER, G. PEYRÉ, AND F. SANTAMBROGIO. *Derivatives with respect to metrics and applications: subgradient marching algorithm*. Numerische Mathematik, vol. 116, no. 3, pp. 357-381, May 2010.
- [4] L. E. DUBINS. *On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents*. Amer. J. Math., vol. 79, pp. 497-516, 1957.
- [5] R. DUITZ, S.P.L. MEESTERS, J.-M. MIREBEAU, J. M. PORTEGIES. *Optimal Paths for Variants of the 2D and 3D Reeds-Shepp Car with Applications in Image Analysis*. Preprint available on arXiv.
- [6] J.-M. MIREBEAU. *Anisotropic fast-marching on cartesian grids using Voronoi's first reduction of quadratic forms*. preprint available on HAL.
- [7] J.-M. MIREBEAU. *Fast Marching methods for Curvature Penalized Shortest Paths*. preprint available on HAL.
- [8] C. STRODE. *Optimising multistatic sensor locations using path planning and game theory*. IEEE Symposium on Computational Intelligence for Security and Defense Applications (CISDA), Paris, 2011, pp. 9-16.

<sup>1</sup>[github.com/Mirebeau/HamiltonianFastMarching](https://github.com/Mirebeau/HamiltonianFastMarching)