Journées SMAI MODE 2018

Sur l'approche variationnelle de la régularisation par mollification

Pierre MARECHAL
Université de Toulouse

Résumé. L'approche variationnelle de la mollification s'écrit assez naturellement pour les opérateurs ayant une parenté avec l'opérateur de Fourier (convolution, opérateur de Radon). Dans le cas général, il est possible d'étendre le cadre via la notion de relation d'entrelacement d'opérateurs. Ceci permet non seulement d'étendre la classe des problèmes inverses pouvant être régularisés de cette manière, mais aussi d'envisager des approximations de l'unité plus générales que celles issues d'opérateurs de convolution. Cette communication a pour but de présenter le cadre général qui en résulte et de donner quelques résultats de convergence associés.

Mots-clefs : Problèmes inverses, régularisation, approche variationnelle, mollification.

L'utilisation de mollifieurs pour la régularisation des problèmes inverses linéaires trouve ses origines à la fin des années 80. Deux approches se sont développées indépendemment: les *inverses approchés* [2] d'une part, basés sur la dualité dans les espaces de Hilbert, et la synthèse de Fourier [1, 4] d'autre part, qui fait partie des méthodes variationnelles. La deuxième approche, qui était motivée à l'origine par les problèmes de déconvolution et de synthèse d'ouverture en astronomie, a été étendue par la suite à divers problèmes inverses, en particulier à la tomographie [3]. Les deux approches ont en commun le fait qu'un objet cible est clairement défini en termes de l'objet d'origine inconnu, avant tout choix méthodologique: le problème mal posé initial est remplacé par celui visant à reconstruire une version régulière de l'objet inconnu, où la régularité s'exprime au moyen de la convolution (à noyau fixe ou variable).

En vue d'obtenir une construction générale de l'approche variationnelle de la mollification, il est nécessaire d'obtenir des relations d'entrelacement d'opérateurs [5, 6]. De telles relations sont explicites et plutôt immédiates dans certains cas, tels que la déconvolution, l'inversion de l'opérateur de Fourier tronqué, l'inversion de la transformation de Radon. Dans le cas général où l'opérateur à inverser n'a aucune parenté avec l'opérateur de Fourier, il est un peu plus délicat d'obtenir des opérateurs d'entrelacement. Nous devons nous interroger sur leur définition, leur existence et leur calcul. Dans les cas favorables, l'opérateur d'entrelacement peut être obtenu via le pseudo-inverse (non borné) de l'opérateur considéré. L'application de cet opérateur non borné peut être obtenue de manière stable en utilisant un algorithme de type proximal.

Dans cette présentation, nous donnerons une vue d'ensemble de la mollification et proposerons une construction générale pour l'approche variationnelle. Cette approche permettra d'étendre considérablement le domaine des applications potentielles, et permettra d'introduire une grande flexibilité dans le choix de l'objet cible. Nous évoquerons naturellement les questions fondamentales de la consistance et du taux de convergence de l'approche considérée.

Références

[1] A. Lannes *et al.*. *Stabilized reconstruction in signal and image processing*. Journal of Modern Optics, 1987.

[2] A. K. Louis, P. Maass. *A mollifier method for linear operator equations of the first kind*. Inverse Problems, 1990.

[3] P. Maréchal, D. Togane, A. Celler. *A new reconstruction methodology for Computerized Tomography: FRECT*. IEEE, Transactions on Nuclear Science, 2000.

[4] N. Alibaud, P. Maréchal, Y. Saesor. *A variational approach to the inversion of truncated Fourier operators*. Inverse Problems, 2009.

[5] X. Bonnefond, P. Maréchal. *A variational approach to the inversion of some compact operators*. Pacific Journal of Optimization, 2009.

[6] X. Bonnefond, P. Maréchal. *Spectral convex functions of operators and approximate intertwining relationships*. Journal of Optimization Theory and Applications, 2014.

[7] P. Maréchal. *Convergence analysis for generalized mollification*. submitted.