

CALCUL PARCIMONIEUX POUR LES VOLUMES

Matteo TACCHI

RTE-R&D / LAAS-CNRS

Tillmann WEISSER, Didier HENRION, Jean-Bernard LASSERRE

LAAS-CNRS

Résumé. L'article [1] propose une méthode pour le calcul du volume d'un compact semi-algébrique basique, utilisant les hiérarchies moments / SOS développées dans [2]. L'article [3] s'inspire de ces travaux pour estimer la région d'attraction (R.O.A.) d'un compact semi-algébrique basique pour une E.D.O. polynomiale. Dans ces deux approches, le recours au calcul SDP pose un problème de passage à l'échelle : la complexité des algorithmes est polynomiale en la dimension du problème. Nous proposons ici une méthode originale et non triviale pour le calcul de volumes, transposable à l'estimation de R.O.A., qui permet de traiter des problèmes de dimension relativement élevée à condition qu'ils présentent une certaine structure creuse.

Mots-clefs : Programmation semi-définie ; hiérarchies moments / sommes de carrés ; calcul de volumes ; région d'attraction ; stabilité ; parcimonie ; systèmes creux ; graphes.

La méthode proposée dans [1] est la suivante : étant donné un compact semi-algébrique basique inclus dans un hypercube : $\mathbf{K} \subset \mathbf{B} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq R\}$, on cherche à calculer $\text{vol}(\mathbf{K})$; on peut démontrer que

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathbf{K}) &= \max_{\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} d\mu \\ \text{s.c. } &\lambda - \mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^n) \\ &\text{spt}(\mu) \subset \mathbf{K} \end{aligned} \tag{1}$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbf{B} . Ce résultat a été ensuite utilisé dans [3] pour l'estimation de la région d'attraction d'un système différentiel polynomial, *via* la théorie du transport de mesures d'occupation.

De tels problèmes d'optimisation en dimension infinie sont traités numériquement en utilisant les hiérarchies moments / sommes de carrés (voir [2]) : ils sont approximés par des problèmes de programmation semi-définie, lesquels sont très sensibles à la dimension de l'espace ambiant.

Cependant, dans le cas de contraintes creuses, il est possible de découper ces problèmes en sous-problèmes projetés dans des espaces de dimension inférieure. Pour fixer les idées, nous illustrons la méthodologie sur l'exemple suivant :

$$\mathbf{K} := \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid g_1(w, x) \geq 0, g_2(x, y) \geq 0, g_3(y, z) \geq 0\}$$

où $g_1(w, x) = (w, x, 1 - w - x) \in \mathbb{R}[w, x]^3$, $g_i(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$, $i \in \{2, 3\}$.

On pose $\mathbf{K}_i := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g_i(x_1, x_2) \geq 0\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$. On peut alors calculer le volume de \mathbf{K} par deux approches différentes :

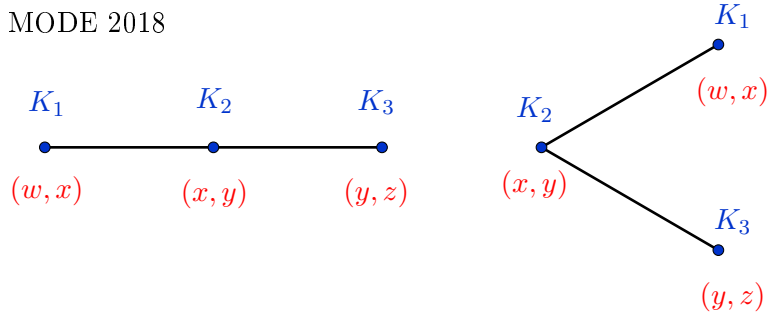


Figure 1: Configurations linéaire (2) et arborescente (3) du calcul parcimonieux de $\text{vol}(\mathbf{K})$.

$$\begin{aligned}
 \text{vol}(\mathbf{K}) &= \max_{\mu^{(1,2,3)} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^2} d\mu^{(1)} & (2) \\
 \text{s.c.} \quad & \mu^{(1)}(dw, dx) \leq dw \mu_x^{(2)}(dx) \\
 & \mu^{(2)}(dx, dy) \leq dx \mu_y^{(3)}(dy) \\
 & \mu^{(3)}(dy, dz) \leq dy dz \\
 & \text{spt}(\mu^{(i)}) \subset \mathbf{K}_i \quad , \quad i \in \{1, 2, 3\}
 \end{aligned}$$

est l'approche associée à la configuration linéaire de la Figure 1 (à gauche) : on est ramené à un problème linéaire unique. On peut également écrire

$$\begin{aligned}
 \text{vol}(\mathbf{K}) &= \int_{\mathbb{R}^2} d\mu^{(2)*} & (3) \\
 & \text{où} \\
 \mu^{(2)*} &= \operatorname{argmax}_{\mu^{(2)} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^2} d\mu^{(2)} \\
 \text{s.c.} \quad & \mu^{(2)}(dx, dy) \leq \mu_x^{(1)*}(dx) \mu_y^{(3)*}(dy) \\
 & \text{spt}(\mu^{(2)}) \subset \mathbf{K}_2 \\
 \mu^{(i)*} &= \operatorname{argmax}_{\mu^{(i)} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^2} d\mu^{(i)} \\
 \text{s.c.} \quad & \mu^{(i)} \leq \lambda \\
 & \text{spt}(\mu^{(i)}) \subset \mathbf{K}_i \quad , \quad i \in \{1, 3\}
 \end{aligned}$$

qui est l'approche associée à la configuration arborescente de la Figure 1 (à droite) : on calcule le volume en résolvant **en parallèle** des sous-problèmes élémentaires, suivant l'arbre de cliques associé. Numériquement, cette méthodologie diminue drastiquement le temps de calcul associé à chaque ordre de la hiérarchie moments / SOS, par rapport à l'approche de l'article [1].

Références

[1] D. HENRION, J.B. LASSERRE, C. SAVORGNAN. *Approximate Volume and Integration for Basic Semialgebraic Sets*. SIAM Review 51 (2009), No. 4, pp. 722–743.

[2] J.B. LASSERRE. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications*. Imperial College Press, London, UK, 2009.

[3] D. HENRION, M. KORDA. *Convex computation of the region of attraction of polynomial control systems*. IEEE Transactions on Automatic Control 59(2):297-312, 2014.