RÉSUMÉ
JOURNÉES SMAI-MODE 2018
UNE APPROCHE PAR TRANSPORT OPTIMAL À LA MINIMISATION DE LA VARIATION TOTALE EN 2D

SAMER DWEIK

Dans cet exposé, nous nous intéressons à l'étude de la régularité $W^{1,p}$ de la solution, en 2D, du problème du gradient minimal

$$\min\left\{\int_\Omega |\nabla u|\,\mathrm{d}x\,:\,u\in BV(\Omega),\,u_{|\partial\Omega}=g\right\}, \tag{0.1}$$

quand Ω est un domaine uniformément convexe, $u_{|\partial\Omega}$ désigne la trace de u et $g:\partial\Omega\mapsto\mathbb{R}$ est une fonction L^1 donnée. Tout d'abord, nous rappelerons la connection entre (0.1) et le problème de Beckmann [1] suivant (voir [8])

$$\min\left\{\int_\Omega |w|\,\mathrm{d}x\,:\,w\in L^1(\Omega,\mathbb{R}^2),\,\nabla\cdot w=0\ \text{ dans }\ \mathring{\Omega},\,w\cdot n=f\ \text{ sur }\ \partial\Omega\right\}, \tag{0.2}$$

où f est la dérivée tangentielle de g (i.e. $f=\partial g/\partial\tau$, τ est la tangente au bord) et n est la normale extérieure au $\partial\Omega$. Plus précisément, dans [8], les auteurs montrent que si u est une solution de (0.1), alors le champ $w=R_{-\frac{\pi}{2}}\nabla u$ résout (0.2), où $R_{-\frac{\pi}{2}}$ désigne une rotation avec angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine. De plus, il est bien connu que ce problème (0.2) est équivalent au problème de Monge-Kantorovich suivant

$$\min\left\{\int_{\Omega\times\Omega}|x-y|\,\mathrm{d}\gamma:\ \gamma\in\Pi(f^+,f^-)\right\}, \tag{0.3}$$

où

$$\Pi(f^+,f^-):=\left\{\gamma\in\mathcal{M}^+(\Omega\times\Omega):\ (\Pi_x)_\#\gamma=f^+\ ,\ (\Pi_y)_\#\gamma=f^-\ \right\}$$

et $f=f^+-f^-$.

En fait, on pourra démontrer que si γ est un minimiseur du (0.3), alors le champ de vecteur w_γ donné par

$$< w_\gamma,\xi >:=\int_{\Omega\times\Omega}\mathrm{d}\gamma(x,y)\int_0^1\xi((1-t)x+ty)|x-y|\,\mathrm{d}t,\ \text{ pour tout }\ \xi\in C(\Omega,\mathbb{R}^2)$$

est un minimiseur de (0.2). Il est connu que tout minimiseur de (0.2) vient d'un minimiseur γ de (0.3) (voir, par exemple, [10]). En plus, il n'est pas difficile de prouver que ce minimiseur est unique dans le cas où f^+ ou f^- est non-atomique et Ω est uniformément convexe (voir, par exemple, [7]).

Donc, étudier la régularité $W^{1,p}$ de u revient à étudier la sommabilité L^p du flot optimal w_γ. Notons que [2, 3, 4, 9] analysent la sommabilité L^p du flot optimal w: en dimension 2, pour $p < 2$, $w \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^2)$ dès que l'une des deux mesures f^+ ou f^- est dans $L^p(\Omega)$, tandis que pour $p \geq 2$, cela nécessite que toutes les deux f^+ et f^- soient dans $L^p(\Omega)$. Dans [6], les auteurs prouvent aussi que le flot optimal w de (0.2), entre f^+ et sa projection sur le bord $(P_{\partial\Omega})_\# f^+$, est dans $L^p(\Omega)$ (pour tout $1 \leq p \leq \infty$) dès que $f^+ \in L^p(\Omega)$ et le domaine Ω satisfait une condition de boule uniforme extérieure. Cependant, la sommabilité L^p du w dans le cas où on transporte une mesure f^+, concentrée sur le bord, vers une autre f^-, concentrée sur le bord aussi, n'est pas présente dans la litérature. En particulier, si $f^\pm \in L^p(\partial\Omega)$, est-il vrai que le flot optimal w entre f^+ et f^- est dans $L^p(\Omega)$?

En fait, par un argument d'interpolation géodésique et d'approximation par des mesures atomiques, nous montrons [5] que si $f^\pm \in L^p(\partial\Omega)$, alors le flot minimal w est dans $L^p(\Omega)$, à condition que $p \leq 2$ et Ω est uniformément convexe. Par conséquent, sous ces hypothèses, pour une donnée au bord g dans $W^{1,p}(\partial\Omega)$, la solution u est dans $W^{1,p}(\Omega)$. Finalement, par un contre-exemple, nous montrons que ce résultat ne reste plus valable si $p > 2$. Nous récupérons aussi l'hypothèse classique $g \in C^{1,1}(\partial\Omega)$ pour obtenir $u \in \mathrm{Lip}(\Omega)$.

References

[1] M. Beckmann, A continuous model of transportation, *Econometrica*, 20, 643-660, 1952.

[2] L. De Pascale, L. C. Evans and A. Pratelli, Integral estimates for transport densities, *Bull. of the London Math. Soc.*, 36, n. 3,pp. 383-395, 2004.

[3] L. De Pascale and A. Pratelli, Regularity properties for Monge Transport Density and for Solutions of some Shape Optimization Problem, *Calc. Var. Par. Diff. Eq*, 14, n. 3, pp.249-274, 2002.

[4] L. De Pascale and A. Pratelli, Sharp summability for Monge Transport density via Interpolation, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 10, n. 4, pp. 549-552, 2004.

[5] S. Dweik and F. Santambrogio, Optimal transport approach to the BV least gradient problem in 2D: existence, uniqueness and $W^{1,p}$ estimates, in preparation, 2018.

[6] S. Dweik and F. Santambrogio, Summability estimates on transport densities with Dirichlet regions on the boundary via symmetrization techniques, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2017.

[7] M. Feldman and R. McCann, Uniqueness and transport density in Monge's mass transportation problem, *Calc. Var. Par. Diff. Eq.*, 15, n. 1, pp. 81–113, 2002.

[8] W. Górny, P. Rybka and A. Sabra, Special cases of the planar least gradient problem, *Nonlinear Analysis*, 151, pp. 66 – 95, 2017.

[9] F. Santambrogio, Absolute continuity and summability of transport densities: simpler proofs and new estimates, *Calc. Var. Par. Diff. Eq.*, (2009) 36: 343-354.

[10] F. Santambrogio, *Optimal Transport for Applied Mathematicians*, in *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications* 87, Birkhäuser Basel (2015).