

JEUX DE PATROUILLE ET DE DISSIMULATION CONTINUS

Tristan GARREC

Toulouse School of Economics

Résumé. Nous présentons deux jeux à deux joueurs et à somme nulle modélisant une situation dans laquelle l'un d'eux attaque (ou se cache) dans un ensemble compact en dimension finie, et l'autre tente d'empêcher l'attaque (ou de le trouver). Le premier jeu, dit jeu de patrouille, correspond à une formulation dynamique de cette situation, au sens où l'attaquant choisit un temps et un point d'attaque tandis que le patrouilleur choisit une trajectoire continue afin de maximiser la probabilité de trouver le point d'attaque dans un délais donné. Le second jeu, dit jeu de dissimulation, correspond à une formulation statique dans laquelle les deux joueurs choisissent simultanément un point, le chercheur maximise la probabilité d'être à une distance inférieure à un rayon donné de son adversaire.

Mots-clefs : Jeux à somme nulle, patrouille, dissimulation, surveillance, réseaux

Les jeux de patrouille et de dissimulation continus appartiennent au domaine des jeux de recherche [1], introduits par Isaac [2], et dans lesquels un chercheur tente en général de minimiser le temps nécessaire pour trouver un cacheur, ou de maximiser la probabilité de le trouver.

Dans un jeu de patrouille, deux joueurs, l'attaquant et le patrouilleur, jouent sur un ensemble Q appelé espace de recherche, que l'on suppose être un sous ensemble compact et non vide de \mathbb{R}^n . Un exemple de tel espace est un réseau métrique. L'attaquant choisit un point d'attaque y dans Q et un temps d'attaque t dans \mathbb{R}_+ . Le patrouilleur marche continument dans Q à vitesse au plus 1. Lorsque l'attaque se produit aux temps t et point y , le patrouilleur a un délais $m \in \mathbb{R}_+$ pour être à distance au plus $r \in \mathbb{R}_+$ du point d'attaque y . Dans ce cas il détecte l'attaque et gagne, dans le cas contraire il perd. Ainsi, m représente délais le nécessaire pour qu'une attaque soit couronnée de succès, et r représente le rayon de détection du patrouilleur. Un jeu de patrouille est donc un jeu à somme nulle donné par un triplet (Q, m, r) . L'ensemble des stratégies pures de l'attaquant est $\mathcal{A} = Q \times \mathbb{R}_+$. Celui du patrouilleur est $\mathcal{W} = \{w : \mathbb{R}_+ \rightarrow Q \mid w \text{ est 1-Lipschitz}\}$. Le paiement du patrouilleur est donné par

$$g_{m,r}(w, (y, t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } d(y, w([t, t + m])) \leq r \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $w([t, t + m]) = \{w(\tau) \mid \tau \in [t, t + m]\}$.

Les jeux de patrouille ont été introduits par Alpern et al. [3] dans un cadre discret, c'est-à-dire que le patrouilleur parcourt les nœuds d'un graphe, où l'attaquant peut frapper, en temps discret. Un second article [4] est consacré à la résolution du jeu de patrouille sur une ligne discrète.

Pour les jeux de patrouille continus, on démontre l'existence de la valeur pour laquelle on obtient une borne supérieure. On étudie les jeux de patrouille sur des réseaux. On calcul

en particulier la valeur ainsi que des stratégies optimales pour le cas particulier des réseaux eulériens. L'exemple du réseau consistant en deux nœuds joints par trois arcs parallèles est également examiné, on donne des bornes sur la valeur. Enfin, on étudie les jeux de patrouille dans \mathbb{R}^2 et on obtient une expression asymptotique de la valeur lorsque le rayon de détection tend vers zéro.

Dans un jeu de dissimulation, deux joueurs, le chercheur et le cacheur, jouent également sur un ensemble de recherche Q . Tous deux choisissent un point dans Q . Le chercheur a un rayon de détection $r \in \mathbb{R}_+$. Il trouve le cacheur si et seulement si ce dernier est à une distance de lui inférieure à r . Dès lors, un jeu de dissimulation est un jeu à somme nulle donné par un couple (Q, r) . L'ensemble des stratégies pures des deux joueurs est Q . Le paiement du chercheur est donné par

$$h_r(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x - y\| \leq r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi un jeu de patrouille dont le délais d'attaque m vaut zéro se réduit à un jeu de dissimulation.

Le premier exemple publié de jeu de dissimulation est celui dont l'espace de recherche est le disque [5]. La résolution du problème a été améliorée par Danskin [6]. Toutefois la solution pour tout rayon de détection n'est à ce jour toujours pas connue. Ruckle dans son livre [7] a également étudié plusieurs exemples de jeux de dissimulation (sur la sphere, le disque, etc). Pour les jeux de dissimulation, on donne une formule asymptotique de la valeur lorsque l'ensemble de recherche est compact et de mesure de Lebesgue strictement positive. Un contre-exemple pour lequel l'espace de recherche est un ensemble de Cantor montre que ce résultat ne peut-être étendu aux ensemble compact dont la mesure de Lebesgue est nulle.

Références

- [1] S. ALPERN, S. GAL. *The Theory of Search Games and Rendezvous*. Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [2] R. ISAAC. *Differential Games*. Dover Publications, 1999.
- [3] S. ALPERN, A. MORTON, K. PAPADAKI. *Patrolling games*. Operations Research, 59, 1246–1257, 2011.
- [4] S. ALPERN, T. LIDBETTER, A. MORTON, K. PAPADAKI. *Patrolling a border*. Operations Research, 64, 1256–1269, 2016.
- [5] D. GALE, G.R. GLASSEY. *Elementary problem no. 2468*. American Mathematical Monthly, 82, 521–522, 1974.
- [6] J.M. DANSKIN. *On the cookie-cutter game: Search and evasion on a disc*. Mathematics of Operations Research, 15, 573–596, 1990.
- [7] W.H. RUCKLE. *Geometric games and their applications*. Pitman Advanced Publishing Program, 1983.