Journées SMAI MODE 2018

Probabilité globale de collision
Une modélisation par les mesures d'occupation

Denis ARZELIER
Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS), Toulouse

Florent BREHARD
Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS), Toulouse

Mioara JOLDES
Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS), Toulouse

Jean-Bernard LASSERRE
Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS), Toulouse

Aude RONDEPIERRE
Institut de Mathématiques de Toulouse
Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS), Toulouse

Résumé. Dans cet exposé, nous proposons une nouvelle modélisation pour le calcul de la probabilité de collision entre deux objets sphériques en orbite autour de la Terre. Dans un premier temps, nous montrerons comment, à l'aide des mesures d'occupation, le calcul de la probabilité de collision peut se reformuler en un problème de programmation linéaire de dimension infinie dans le cône des mesures semi-définies positives (SDP), dont la valeur optimale est exactement la probabilité cherchée. Dans un second temps, nous verrons comment résoudre numériquement ce problème d'optimisation linéaire dans l'espace des mesures par la manipulation de leurs moments en construisant une hiérarchie de relaxations SDP. On construit ainsi une suite de majorants convergeant vers la probabilité de collision cherchée. Nous conclurons cet exposé par quelques tests numériques montrant les forces et les limitations de cette approche au regard de l'application visée.

Mots-clefs : Probabilité de collision, mesures d'occupation, équation de Liouville, optimisation linéaire sur des mesures, hiérarchies de Lasserre.

Depuis la collision entre le satellite russe COSMOS 1934 et un débris de COSMOS 926 en décembre 1991, pas moins de huit collisions ont été recensées en orbite entre des satellites opérationnels, ou entre des satellites et des débris. Les risques de collision sont particulièrement importants sur les orbites basses et les différentes agences spatiales (CNES, ESA, NASA) et les opérateurs du domaine (Airbus Defence and Space, GMV) ont mis en place des procédures d'alerte permettant d'évaluer les risques de collision concernant les satellites contrôlés, et autorisant le déclenchement des manœuvres d'évitement si le risque est jugé important.
A l'origine de toute procédure d'évitement de collision, se trouve les informations de conjonction entre deux objets. Depuis 2009, un message de conjonction est envoyé à tous les propriétaires et opérateurs d'engins spatiaux par le Joint Space Operations Center (JSpOC) dont l'objectif principal est de détecter, suivre, identifier et cataloguer tous les objets artificiels

orbitant autour de la terre. L'information fournie par le JSpOC consiste en un Conjunction Assessment Report contenant peu d'informations et envoyé seulement trois jours avant la date de rencontre. Pour obtenir des informations plus précises sur la possible rencontre, il est nécessaire de s'abonner à un service qui fournira en retour un Conjunction Summary Report, d'où est extraite l'information nécessaire au calcul du risque de collision.
Cet exposé est consacré à la problématique d'évaluation du risque de collision en orbite. Le cadre général est celui d'un satellite actif menacé par un débris non contrôlé. Etant donné un intervalle de temps de rencontre $\mathcal{I} = [0, T]$, considérons un modèle dynamique général:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \\ x(0) & = & x_0. \end{array} \right. \tag{1}$$

où l'état du système est décrit par les positions et vitesses des 2 objets: $x = (r_p, \dot{r}_p, r_s, \dot{r}_s) \in \mathbb{R}^{12}$ dans un repère de référence. On supposera que quel que soit le modèle dynamique adopté, il existe une unique trajectoire solution du système (1) sont notées $x(t|x_0)$.
Les conditions initiales $x_0 \in \mathbb{R}^{12}$ sont soumises à incertitude et représentées par un vecteur aléatoire déterminé par sa densité de probabilité ρ_0. Une hypothèse classique consiste à supposer ces incertitudes gaussiennes à l'instant de référence $t = 0, :$ $x_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, \Sigma_0)$, l'espérance μ_0 et la matrice de covariance Σ_0 étant données par les CSM fournis par le JSpOC. De plus les deux objets sont supposés sphériques ce qui permet d'ignorer leur orientation et de modéliser de façon conservative le débris dont la géométrie est souvent mal connue. Le domaine de collision $\mathcal{D}_c(\mathcal{I})$ sur l'intervalle de temps $\mathcal{I}$ peut alors être défini comme l'ensemble des conditions initiales conduisant à une collision sur $\mathcal{I}$, soit:

$$\mathcal{D}_c(\mathcal{I}) = \{x_0 \in \mathbb{R}^{12} \mid \exists t \in \mathcal{I},\ x(t|x_0) \in \mathcal{X}_R\},$$

où: $\mathcal{X}_R = \{x \in \mathbb{R}^{12} \mid \|r_p - r_s\|_2^2 \leq R^2\}$ désigne la région *interdite* dans laquelle la distance relative entre les deux objets est inférieure à un certain seuil $R > 0$. De même, on peut définir l'ensemble $\mathcal{X}_0$ des conditions initiales *sûres* i.e. ne conduisant pas à une collision sur $[0, T]$:

$$\mathcal{X}_0 = \{x_0 \in \mathbb{R}^{12} \mid \forall t \in [0, T],\ x(t|x_0) \in \mathcal{X}_R^c\}.$$

Une première formulation de notre problème consiste alors à calculer tout d'abord la probabilité qu'aucune collision ne survienne sur l'intervalle de temps $[0, T]$ i.e.:

$$\mathcal{P}_{nc} = \mathbb{P}(x_0 \in \mathcal{X}_0) = \rho_0(\mathcal{X}_0), \tag{2}$$

pour en déduire la probabilité de collision: $\mathcal{P}_c = 1 - \mathcal{P}_{nc}$. Le calcul analytique de cette probabilité est un problème difficile, même pour des distributions initiales gaussiennes. Les seules méthodes qui s'appliquent sans hypothèse supplémentaires sont celles de Monte-Carlo [2], mais elles sont très couteuses en temps et peu adaptées à la détection d'évènement peu probable. Dans le cadre spécifique des rencontres court-terme (vitesse relative élevée, mouvement rectiligne uniforme), plusieurs techniques de calcul ont été élaborées [4, 8, 1, 3, 9], mais elles ne se généralisent pas, ou que très imparfaitement, au cas des rencontres long terme ou des rencontres multiples (plusieurs satellites en formation menacés par un ou plusieurs débris).
L'objet de cet exposé est de décrire une nouvelle modélisation du problème du calcul de la probabilité de collision à l'aide des mesures d'occupation. Dans un premier temps, nous montrerons que le problème (2) peut se reformuler sous la forme d'un problème de programmation linéaire de dimension infinie dans le cône des mesures positives dont la valeur optimale est

exactement la probabilité de non-collision cherchée. Le principal outil théorique de cette reformulation est l'équation de Liouville, qui apparait en mécanique classique, et qui décrit l'évolution dans le temps d'une mesure (ou d'une densité) transportée par le flot associé à un système dynamique non linéaire (ici, le système (1)). Ces travaux s'appuient sur les références [6, 5], dans lesquelles cette transformation est proposée également pour des systèmes contrôlés. Une contribution importante de ces travaux est de proposer la première modélisation mathématique rigoureuse et exacte du calcul de la probabilité de collision sans hypothèse simplificatrice particulière sur le modèle dynamique adopté, la durée de la rencontre, le nombre d'objets impliqués dans la rencontre ou même la distribution des états initiaux.
Dans un second temps, nous verrons concrètement comment résoudre numériquement ce problème d'optimisation linéaire dans le cône des mesures positives par la manipulation de leurs moments en construisant une hiérarchie de relaxations SDP [7]: le principe consiste à résoudre une suite de problèmes d'optimisation SDP de taille croissante et dont les valeurs optimales convergent vers la valeur optimale du problème linéaire de départ, à savoir la probabilité de non-collision cherchée. On montrera en particulier que cette hiérarchie de relaxations SDP fournissent théoriquement une suite de bornes supérieures convergeant vers la probabilité cherchée. Quelques résultats numériques seront présentés montrant les forces et les limitations de cette approche au regard de l'application visée.

Références

[1] S. Alfano. *Aerospace Support to Space Situation Awareness*, Applicationes Mathematicae, oct 2002.

[2] S. Alfano. *Satellite conjunction Monte Carlo analysis*, Advances in the Astronautical Sciences, 134:2007–2024, jan 2009.

[3] F.K. Chan. *Collision Probability Analysis for Earth-orbiting Satellites*, Advances in the Astronautical Sciences, 96, 1997.

[4] J. L. Foster and S. E. Herbert. *A Parametric Analysis of orbital Debris Collision Probability and Maneuver Rate for Space Vehicles*, Technical report, NASA Johnson Space Center, August 1992.

[5] D. Henrion and M. Korda. *Convex computation of the region of attraction of polynomial control systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 59(2):297–312, 2014.

[6] M. Korda, D. Henrion, and C.N. Jones. *Inner approximations of the region of attraction for polynomial dynamical systems*, IFAC Proceedings Volumes, 46(23):534–539, 2013.

[7] J.B. Lasserre. *An Introduction to Polynomial and Semi-Algebraic Optimization*, Cambridge University Press, 2015.

[8] R.P. Patera. *General Method for Calculating Satellite Collision Probability*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 24(4):716–722, July 2001.

[9] R. Serra, D. Arzelier, M.M. Joldes, J.B. Lasserre, A. Rondepierre, B. Salvy. *Fast and accurate computation of orbital collision probability for short-term encounters*, Journal of Guidance Control and Dynamics, 2016.