Journées SMAI MODE 2018

Jeux à champ moyen en temps minimal

Guilherme MAZANTI
Université Paris-Sud

Résumé. Cet exposé s'intéresse à un modèle de jeu à champ moyen motivé par les mouvements de foule, où l'objectif de chaque agent est de sortir d'un domaine donné par une partie de son bord en temps minimal. Chaque agent est libre de se déplacer dans toutes les directions, mais sa vitesse maximale est bornée en termes de la distribution d'agents autour de sa position afin de prendre en compte des phénomènes de congestion.
Dans un premier temps, nous formulerons ce jeu à champ moyen dans un cadre Lagrangien et montrerons l'existence d'un équilibre par une méthode de point fixe. Grâce à des propriétés supplémentaires de régularité des trajectoires optimales des agents obtenues par le principe du maximum de Pontryagin, nous caractériserons ensuite les équilibres à travers un système d'une équation de continuité sur la distribution d'agents couplée avec une équation de Hamilton–Jacobi sur la fonction valeur du problème de contrôle optimal de chaque agent. Nous montrerons finalement que, si la distribution des agents à l'instant initial est une mesure absolument continue à densité L^p, alors cette mesure reste à densité L^p pour tout instant $t \geq 0$.

Mots-clefs : Jeux à champ moyen, temps minimal, contrôle optimal, mouvement de foule.

Introduits autour de 2006 par Jean-Michel Lasry et Pierre-Louis Lions [7, 8] et de façon indépendante par Peter E. Caines, Minyi Huang et Roland P. Malhamé [5, 6], les jeux à champ moyen sont des jeux différentiels avec un continuum d'agents, supposés rationnels, indiscernables et influencés uniquement par le comportement moyen des autres agents, à travers une interaction du type champ moyen. Leur introduction a été motivée par des questions d'économie et de sciences de l'ingénieur, avec l'objectif d'obtenir une approximation d'équilibres de Nash de jeux à un grand nombre d'agents symétriques. La dernière décennie a vu un essor considérable de ce domaine et un élargissement de son champ d'application, avec quelques éditions spéciales de revues consacrées à ce sujet [1, 2, 3] et plusieurs travaux sur différentes thématiques, telles que le lien entre les jeux à champ moyen et les jeux à un grand nombre d'agents symétriques, les approximations numériques de leurs équilibres, les jeux à champ moyen avec une structure variationnelle, des jeux sur des graphes ou réseaux, ou encore la caractérisation des équilibres par la *master equation*.
Après une introduction aux jeux à champ moyen et leur formulation mathématique, cet exposé traitera d'un jeu à champ moyen particulier motivé par l'étude des mouvements de foule. Il s'agit d'un jeu où les agents évoluent dans un domaine $\overline{\Omega}$, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert et borné. Leur distribution initiale est donnée par une mesure de probabilité $m_0 \in \mathcal{P}(\overline{\Omega})$, où $\mathcal{P}(\overline{\Omega})$ dénote l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur $\overline{\Omega}$. Leur objectif est de sortir de Ω par une partie $\Gamma \subset \partial\Omega$ en temps minimal, les phénomènes de congestion étant pris en compte sous forme de contrainte sur la vitesse maximale d'un agent en termes de la distribution d'agents autour de sa position.

Plus précisément, la dynamique d'un agent est supposée être donnée par l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = K(m_t, x(t))u(t), \tag{1}$$

où $x(t) \in \overline{\Omega}$ est la position de l'agent, $u(t)$ son contrôle, qui appartient à la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$, $m_t \in \mathcal{P}(\overline{\Omega})$ est la mesure représentant la distribution d'agents à l'instant t, et $K : \mathcal{P}(\overline{\Omega}) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_+$ détermine la vitesse maximale de chaque agent. La fonction K modélise les effets dus à la congestion et est supposée être de la forme

$$K(\mu, x) = g\left[\int_{\overline{\Omega}} \chi(x-y)\eta(y)d\mu(y)\right]. \tag{2}$$

Ainsi, chaque agent évalue une densité moyenne d'agents autour de lui à travers le terme intégral, χ étant un noyau de convolution et η une fonction *cut-off* permettant de ne pas prendre en compte les agents ayant déjà quitté le jeu, qui restent sur Γ. Sa vitesse maximale dépend de cette évaluation de la densité à travers g, qui est supposée décroissante.
Dans un premier moment, nous donnerons une formulation Lagrangienne de ce jeu à champ moyen. Il s'agit de décrire l'évolution des agents par une mesure Q sur l'ensemble $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \overline{\Omega})$ de trajectoires possibles sur Ω. Une telle mesure Q est appelée un *équilibre* de ce jeu à champ moyen si son image par l'évaluation au temps zéro coïncide avec la distribution initiale d'agents m_0 et Q-presque toute trajectoire x satisfait (1) pour un certain contrôle mesurable u et minimise le temps de parcours de $x(0)$ à Γ parmi les trajectoires satisfaisant (1). Nous montrerons l'existence d'un équilibre Q en reformulant cette notion en termes d'un problème de point fixe.
Nous donnerons ensuite une caractérisation de l'équilibre dans le cas où $\Gamma = \partial\Omega$, en montrant que la distribution d'agents m_t satisfait une équation de continuité dont le champs de vitesse dépend de la fonction valeur φ du problème de contrôle optimal satisfait par chaque agent. Plus précisément, nous montrerons que, sous des hypothèses convenables sur Ω et K, m et φ sont solutions de

$$\begin{cases} \partial_t m(t,x) - \operatorname{div}\left[m(t,x)K(m_t,x)\widehat{\nabla\varphi}(t,x)\right] = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega, \\ -\partial_t \varphi(t,x) + |\nabla\varphi(t,x)|K(m_t,x) - 1 = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ m(0,\cdot) = m_0, & \\ \varphi(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Dans ce système, $\widehat{\nabla\varphi}$ est le gradient normalisé de φ, défini par $\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$ si $\nabla\varphi$ existe et est non-nul, mais qui peut éventuellement être aussi défini lorsque $\nabla\varphi$ n'existe pas. Comme pour les jeux à champ moyen classiques, il s'agit d'une caractérisation de l'équilibre par un système d'une équation de continuité sur m, satisfaite au sens des distributions, couplée avec une équation de Hamilton–Jacobi sur φ, satisfaite au sens de viscosité. Il est très important pour cette caractérisation d'obtenir des propriétés de régularité supplémentaires des trajectoires optimales des agents, ce que nous faisons par une application du principe du maximum de Pontryagin.
Dans la dernière partie de l'exposé, nous montrerons que, sous des hypothèses raisonnables, si m_0 est une mesure absolument continue à densité dans $L^p(\Omega)$, alors la restriction de m_t à Ω est aussi absolument continue et à densité dans $L^p(\Omega)$ pour tout $t \geq 0$, avec un contrôle de la norme L^p de la densité de m_t par celle de la densité de m_0. Les estimées utilisées pour

démontrer ce résultat sont uniformes par rapport à la fonction *cut-off* η de (2), ce qui permet également de montrer l'existence d'un équilibre à notre jeu à champ moyen et le caractériser par (3) aussi dans le cas où η est la fonction caractéristique de l'ensemble ouvert Ω, grâce à un argument de passage à la limite.
Cet exposé est basé sur les travaux en cours [4, 9] en collaboration avec Samer Dweik et Filippo Santambrogio.

Références

[1] M. Bardi, P. E. Caines, and I. Capuzzo Dolcetta (editors). *Special Issue on Mean Field Games*. Dyn. Games Appl., 3(4), 2013.

[2] M. Bardi, P. E. Caines, and I. Capuzzo Dolcetta (editors). *Second Special Issue on Mean Field Games*. Dyn. Games Appl., 4(2), 2014.

[3] F. Camilli, I. Capuzzo Dolcetta, and M. Falcone (editors). *Special Issue on Mean Field Games*. Netw. Heterog. Media, 7(2), 2012.

[4] S. Dweik and G. Mazanti. *Sharp semi-concavity and L^p estimates in an optimal-exit MFG of crowd motion*. En cours.

[5] M. Huang, P. E. Caines, and R. P. Malhamé. *Large-population cost-coupled LQG problems with nonuniform agents: individual-mass behavior and decentralized ϵ-Nash equilibria*. IEEE Trans. Automat. Control, 52(9):1560–1571, 2007.

[6] M. Huang, R. P. Malhamé, and P. E. Caines. *Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle*. Commun. Inf. Syst., 6(3):221–251, 2006.

[7] J.-M. Lasry and P.-L. Lions. *Jeux à champ moyen. I. Le cas stationnaire*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 343(9):619–625, 2006.

[8] J.-M. Lasry and P.-L. Lions. *Jeux à champ moyen. II. Horizon fini et contrôle optimal*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 343(10):679–684, 2006.

[9] G. Mazanti and F. Santambrogio. *Minimal time mean field games*. En cours.